منقول المصفوفة :

تعريف ٧: منقول مصفوفة A من الرتبة $m\times n$ هو المصفوفة A^t من الرتبة $n\times m$ ، بحيث صفوف الثانية هي أعمدة الأولى وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى .

مثال ١١: احسب منقول كل من المصفوفات المعطاة في المثال السابق.

الحل:

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix},\qquad B^t=\begin{pmatrix}3\\0\\0.5\end{pmatrix},\qquad C^t=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

٣. بعض المصفوفات الخاصة :

١,٣ المصفوفة المربعة :

تعريف ٨: تكون المصفوفة A مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

مثال ١٢: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\4 & -2 & 1\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\-5 & 3 & 0\\6 & 1 & -3\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 6\\0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

المصفوفات B و A مصفوفات مربعة 2×2 والمصفوفات D و C مصفوفات مربعة 3×3 بينما المصفوفة E ليست مصفوفة مربعة

٢,٣ مصفوفة الوحدة:

تعريف ٩: مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة ، وكل عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 وكل العناصر الأخرى تساوي الصفر.ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الرتبة $n\times n$ ، أو بالرمز I إذا لم يكن هناك التباس في رتبتها.

مثال ١٣:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

نظرية ٥: مصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات.

مثال ١٤: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix},\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}.$$

٤. تعريف المحددات:

تعريف ١٠: المحدد من الرتبة $n\times n$ هو عدد حقيقي نتحصل عليه من المصفوفة المربعة وذلك باستخدام قواعد حسابية معينة. ونرمز له بالرمز $\det(A)$.

.يمكن الإشارة إلى أنّ قيمة المحددات 1×1 تساوي عنصرها.

١,٤ حساب المحددات 2×2 :

تعريف ١١: المحدد 2×2 للمصفوفة $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسي (الصاعد)، أي أنّ:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال ١٥: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2\times 3)-(4\times 1) = 6-4 = 2, \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (1\times 0)-(5\times -1) = 0-(-5) = 5$$

٢,٤ حساب المحددات 3×3 :

تعريف ١٢: المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هو مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة (النازلة) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية الثلاثة (الصاعدة)، و نتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على الترتيب.

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ فإن:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال ١٦: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 8 & 7 \end{matrix}$$

$$= (1\times 6\times 4) + (3\times 3\times 8) + (9\times 2\times 7) - (8\times 6\times 9) - (7\times 3\times 1) - (4\times 2\times 3)$$

$$= 24 + 72 + 126 - 432 - 21 - 24 = -255$$

$$2)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$= (-1\times1\times4) + (0\times -3\times 0) + (2\times5\times -2) - (0\times1\times2) - (-2\times -3\times -1) - (4\times5\times0)$$

$$= -4 + 0 - 20 - 0 - (-6) - 0 = -18$$

مثال ١٧: احسب محددات المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1,\qquad \det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{matrix} = -2 + 0 + 0 - (-12) - 0 - 0 = 10$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 0 + 0 - 20 - 72 - 0 - 15 = -107$$

بينما لا يمكن حساب $\det(E)$ لأنّ E ليست مصفوفة مربعة.

نظرية ٦: محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما.

مثال ١٨: نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق. احسب المحددات التالية:

$$1)\ \det(AB),\qquad 2)\ \det(BA),\qquad 3)\ \det(CD),\qquad 4)\ \det(DC).$$

الحل:

لا نحتاج إلى حساب ضرب المصفوفات لأن المطلوب هو حساب المحددات فقط. نستخدم نتائج المثال السابق:

$$1)\ \det(AB)=\det(A)\times\det(B)=1\times-5=-5$$
$$2)\ \det(BA)=\det(B)\times\det(A)=-5\times1=-5$$
$$3)\ \det(CD)=\det(C)\times\det(D)=10\times-107=-1070$$
$$4)\ \det(DC)=\det(D)\times\det(C)=-107\times10=-1070$$

5. مقلوب المصفوفة :

تعريف ١٣: مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1} - إن وجدت – بحيث حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أنّ:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

سنتطرق في هذا المستوى إلى مقلوب مصفوفة 2×2 فقط

نظرية ٧: إذا كان محدد مصفوفة مربعة A لا يساوي صفرا فإنّها تقبل مقلوبا وحيدا

مقلوب مصفوفة 2×2 :

نظرية ٨: إذا كانت a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية بحيث $\det A=ad-bc\neq0$ لا يساوي الصفر فإنّ:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}{ad-bc}=\frac{\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}$$

أي أنّ هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة 2×2 عندما يكون محددها لا يساوي الصفر.

مثال ١٩: احسب مقلوب المصفوفات 2×2 التالية:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 2 & -6\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

الحل:

1) محدد المصفوفة A لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

2) محدد المصفوفة B لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

3) محدد المصفوفة C يساوي الصفر إذن لا يوجد مقلوبا.

تمارين

تمرين ١: لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

احسب ما يلي ان أمكن

$$1) -2A + 3D, \quad 2) C + B^t, \quad 3) 3A^t - 2D^t, \; 4) 3(A^t + D), \; 5) 2(C^t + I - 3B)$$

تمرين ٢: احسب حاصل ضرب المصفوفات التالية:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad 4) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

تمرين ٣: احسب كلا من المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix},\qquad 2)\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix},\qquad 3)\begin{vmatrix}0 & 7\\ 3 & 6\end{vmatrix},$$

$$4)\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix},\qquad 5)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 5\end{vmatrix},\qquad 6)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

تمرين ٤: لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$M=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & -6\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ \det(M).\qquad 2)\ \det(M^2).\qquad 3)\ \det(M^3).$$

تمرين ٥: احسب مقلوب كل مصفوفة مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -6\end{pmatrix},\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}5 & -10\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

تمرين ٦: لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ 6 & -6\end{pmatrix}.$$

أوجد المصفوفات P و Q و R بحيث:

$$1)\ P=2A+B^2,\qquad 2)\ AQ+BQ=I,\qquad 3)\ RA=C.$$

تمرين ٧: احسب المصفوفة التالية:

$$B=A^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}A$$

تمرين ٨: لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}5 & -3 & 0\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

احسب ما يلي ان أمكن

$$1)\ AB^t,\ 2)\ BA^{-1},\ 3)\ B-C^t,\ 4)\ A^{-1}B^t+C$$